Mo., 19.10.2020

Wenn $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ist und das Potenzgesetz $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ auch für rationale Exponenten gelten soll, dann muss $a^{\frac{m}{n}}$ sinnvollerweise $\sqrt[n]{a}^{\,m}$ sein.

Begründung: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} \overset{*)}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

*) Unter der Annahme, dass das Potenzgesetz gilt.

$$\sqrt[4]{3^2} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[8]{s^6} = (s^6)^{\frac{1}{8}} = s^{6 \cdot \frac{1}{8}} = s^{\frac{6}{8}} = s^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{s^3} = \sqrt[4]{s}^{\,3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[10]{2^8}} = \frac{1}{2^{\frac{8}{10}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{5}}} = \qquad\qquad \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$= \left(2^{\frac{4}{5}}\right)^{-1} = 2^{-\frac{4}{5}} =$$

$$= \sqrt[5]{2^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{1}{2^4}}$$

Rechnen mit Potenzen

Für rationale Exponenten gelten auch die übrigen Potenzgesetze:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$m \quad n \qquad m+n$

$2 \cdot 2 = 2 \quad = 2$

allgemein:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\[1em] \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \end{array}}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (dividiert), indem man die Exponenten addiert (subtrahiert).

$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5$

allgemein:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert (dividiert), indem man die Basen multipliziert (dividiert).

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.