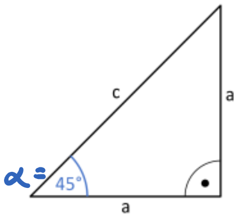
Mathematik 9		13.04.2021
Trigonometrie	Wichtige Winkel	

Winkelfunktionen besonderer Winkel

Von einigen Winkeln kann man die Werte für sin (α), cos (α) und tan (α) exakt angeben.

a) $\alpha = 45°$



Das Dreieck ist rechtwinklig und gleichschenklig.
Drücke c durch a aus (Satz von Pythagoras!):

$a^2 + a^2 = c^2$

$c^2 = 2a^2$

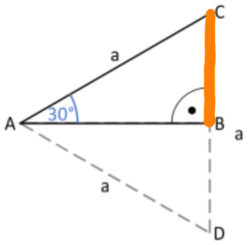
$c = a \cdot \sqrt{2}$

Stelle nun einen Ansatz für sin (45°) auf und vereinfache den Ausdruck:

$\sin(45°) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$

$\sin(45°) = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

b) $\alpha = 30°$



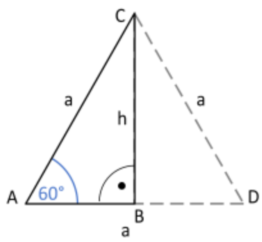
Wir spiegeln das Dreieck ABC an der Seite [AB]. Das so entstandene Dreieck ADC ist gleichseitig.

Wie lang ist deshalb die Strecke [BC]? $\overline{BC} = \frac{1}{2}a$

Stelle nun wieder einen Ansatz für sin (30°) auf und vereinfache den Ausdruck:

$\sin(30°) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$

c) $\alpha = 60°$



Wieder ergänzen wir das Dreieck ABC durch Spiegelung zum Dreieck ADC.

h ist die Höhe in diesem gleichseitigen Dreieck. Mithilfe des Satzes von Pythagoras im Dreieck ABC kannst du diese Höhe durch a ausdrücken: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ Löse diesen Ansatz nach h auf:

$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$

Ergänze den folgenden Ansatz und vereinfache wieder: $\Rightarrow \sin(60°) = \frac{h}{a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a}{a}$

$\sin(60°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

Mathematik 9		13.04.2021
Trigonometrie	Wichtige Winkel	

d) Nachdem wir nun die Werte für sin (30°), sin (45°) und sin (60°) kennen, kannst du über die Beziehung cos (α) = sin (90° - α) auch die Werte für cos(30°), cos (45°) und cos (60°) exakt angeben:

cos(30°) = $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

cos (45°) = $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

cos (60°) = $\frac{1}{2}$

e) Es gilt: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Damit kannst du jetzt auch die folgenden Werte exakt angeben:

tan(30°) = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

tan (45°) = 1

tan (60°) = $\sqrt{3}$

f) Jetzt fehlen noch die Werte für α = 0° und α = 90°. In beiden Fällen gibt es eigentlich kein rechtwinkliges Dreieck mit diesen Winkeln. Es ist jedoch sinnvoll, die folgenden Definitionen zu treffen:

sin (0°) = 0 cos (0°) = 1 tan (0°) = 0

sin (90°) = 1 cos (90°) = 0 tan (90°) ist nicht definiert

g) Zusammenfassung

(Die roten Ergänzungen können als Lernhilfe verwendet werden)

α	sin (α)	cos (α)	tan (α)
0°	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$0 = \frac{1}{3}\sqrt{0}$
30°	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$1 = \frac{1}{3}\sqrt{9}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{27}$
90°	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	nicht definiert