Arbeitsblatt: Bestimmen des Funktionsterms quadratischer Funktionen

Kennt man von einer Parabel 3 verschiedene Punkte, so kann der zugehörige Funktionsterm bestimmt werden. Dies gelingt immer mit dem Ansatz $f(x) = ax^2+bx+c$.
Durch das Einsetzen der Koordinaten der 3 gegebenen Punkte erhält man 3 Gleichungen.
Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems liefert dann den Funktionsterm.

Sind 3 Punkte des Graphen gegeben, dann ist der immer funktionierende Ansatz $f(x) = ax^2+bx+c$.

1. Die Punkte $A(-1|6)$, $B(3|-2)$ und $C(5|0)$ liegen auf G_f. Bestimme den Funktionsterm $f(x)$.

$A(-1|6) \in G_f \Rightarrow$ (I) $a - b + c = 6$ $\Rightarrow$ (Ia) $c = 6-a+b$

$B(3|-2) \in G_f \Rightarrow$ (II) $9a+3b+c=-2$ $\Rightarrow$ c in (II): (IIa) $8a+4b+6=-2$

$C(5|0) \in G_f \Rightarrow$ (III) $25a+5b+c=0$ $\Rightarrow$ c in (III): (IIIa) $24a+6b+6=0$

Löse nun dieses Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit den Unbekannten a und b:

(IIa) $\Rightarrow$ $b=-2a-2$; b in (IIIa): $24a+6(-2a-2)+6=0$ $\Rightarrow$ $12a=6$ $\Rightarrow$ $a=0{,}5$

a in (IIa): $b=-3$; a, b in (Ia): $c=2{,}5$ $f(x)=0{,}5x^2-3x+2{,}5$

Sind unter den gegebenen 3 Punkten 2 Nullstellen x_1 und x_2, so ist der Ansatz $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ günstiger. Durch Einsetzen der Koordinaten des 3. Punktes erhält man a.

2. g besitzt die Nullstellen $x_1=-3$ und $x_2=5$ und der Punkt $A(3|-3)$ liegt auf G_g. Bestimme $g(x)$.

$A(3|-3) \in G_g \Rightarrow -3 = a(3+3)(3-5)$ $\Rightarrow a = (-3):(-12) = \frac{1}{4}$; $g(x) = \frac{1}{4}\cdot(x+3)(x-5)$

Kennt man von einer quadratischen Funktion den Scheitel $S(d|e)$ und einen weiteren Punkt A, kann man den an der Symmetrieachse gespiegelten Punkt A′ (also einen 3. Punkt) bestimmen und wie bei 1. vorgehen.
Häufig ist es jedoch günstiger, für den Ansatz die Scheitelpunktform $f(x) = a(x-d)^2+e$ zu wählen und den Punkt A zur Bestimmung von a zu verwenden.

3. Gegeben ist der Scheitelpunkt $S(2|1)$ und der Punkt $A(4|2)$ von G_h. Bestimme $h(x)$.

$A(4|2) \in G_h \Rightarrow 2 = a(4-2)^2+1$ $\Rightarrow 2=4a+1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$; $h(x) = \frac{1}{4}\cdot(x-2)^2+1$

4. Gib günstige Ansätze an, um Funktionsterme quadratischer Funktionen zu bestimmen, deren Graphen durch folgende Punkte verlaufen:

a) $A(-3|1)$, $B(3|-2)$, $C(5|-7)$ Ansatz: $f(x) = ax^2+bx+c$

b) $P(-2|0)$, $Q(0|6)$, $R(3|0)$ Ansatz: $f(x) = a(x+2)(x-3)$

c) $R(-2{,}5|8)$, $S(1{,}5|-4)$, $T(5{,}5|8)$ Ansatz: $f(x) = a(x-1{,}5)^2-4$

d) Scheitelpunkt $S(3|2)$, $A(1|0)$ Ansatz: $f(x) = a(x-3)^2+2$ oder $a(x-1)(x-5)$