1. Infinitesimalrechnung

- S. 132 / 7 d

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$
$e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
$$f'(x) = \frac{0-1\cdot\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{-e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

- S. 132 / 7 g

$$f(x) = e^{x^2+x}$$
$D_f = \mathbb{R}$
$$f'(x) = e^{x^2+x}\cdot\left(x^2+x\right)' = e^{x^2+x}\cdot(2x+1) = (2x+1)\cdot e^{x^2+x}$$

- S. 136 / 18

$\frac{1}{x^2-x}$ soll als Summe von zwei Brüchen mit den Nennern x und $x-1$ geschrieben werden.

Ansatz: $\frac{1}{x^2-x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$

$$\Rightarrow \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} = \frac{A\cdot(x-1)+B\cdot x}{x\cdot(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx}{x^2-x} = \frac{x\cdot(A+B)-A}{x^2-x}$$

Vergleich mit $\frac{1}{x^2-x}$ liefert:

$$x\cdot(A+B)-A = 1$$
$$\Rightarrow A+B = 0 \wedge -A = 1$$
$$\Rightarrow A = -1 \wedge B = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x} = \frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}$$
$$\int_a^b \frac{1}{x^2-x}dx = \int_a^b \left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \int_a^b \frac{-1}{x}dx+\int_a^b \frac{1}{x-1}dx =$$
$$= \left[-\ln|x|+\ln|x-1|\right]_a^b =$$
$$= -\ln|b|+\ln|b-1|-\left(-\ln|a|+\ln|a-1|\right) =$$
$$= \ln\frac{|a|}{|b|}+\ln\frac{|b-1|}{|a-1|} = \ln\left|\frac{ab-a}{ab-b}\right|$$

Damit das Integral existiert, müssen *a* und *b* so gewählt sein, dass x^2-x im Intervall $[a;b]$ keine Nullstelle enthält.

$\Rightarrow$ *a* und *b* müssen beide (gleichzeitig) in einem der drei Intervalle $]-\infty;0[$ oder $]0;1[$ oder $]1;\infty[$ liegen.

- S. 137 / 26 a

$f: x \mapsto f(x) = x^2 \ln x; \quad x \in \mathbb{R}^+$

Nullstelle: $x = 1 \quad (x = 0 \notin \mathbb{R}^+!)$

$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (1 + 2\ln x)$

$f''(x) = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 3 + 2\ln x$

Extremstellen: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \; x = 0 \notin \mathbb{R}^+ \; \vee \; 1 + 2\ln x = 0$

$\Rightarrow \; \ln x = -\frac{1}{2} \; \Rightarrow \; x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e \; \Rightarrow \; \text{Min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \,\middle|\, -\frac{1}{2}e\right)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \; \Rightarrow \; 3 + 2\ln x = 0 \; \Rightarrow \; \ln x = -\frac{3}{2} \; \Rightarrow \; x = e^{-\frac{3}{2}}$

$$\left.\begin{array}{l} x < e^{-\frac{3}{2}} \; \Rightarrow \; \ln(x) < -\frac{3}{2} \; \Rightarrow \; f''(x) < 0 \\ x > e^{-\frac{3}{2}} \; \Rightarrow \; \ln(x) > -\frac{3}{2} \; \Rightarrow \; f''(x) > 0 \\ f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2e^3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{WP}\left(e^{-\frac{3}{2}} \,\middle|\, -\frac{3}{2e^3}\right)$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 \ln x\right) = \infty$

- S. 137 / 26 d

$g(x) = x^3 \ln x$

$g'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln x + x^2$

$t^2 \ln t = \frac{1}{3}\left(g'(t) - t^2\right) = \frac{1}{3} g'(t) - \frac{t^2}{3}$

$\Rightarrow \; F(x) = \int\limits_1^x t^2 \ln t \, dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{t^3}{9}\right]_1^x = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{x^3}{9}\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot 1^3 \ln 1 - \frac{1^3}{9}\right] =$

$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{x^3}{3} \cdot (-1 + \ln x) + \frac{1}{9}$