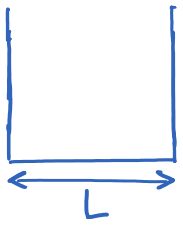
Fr., 20.11.2020

2.2 Elektron im Potenzialtopf

Ein Elektron ist in einem Kasten mit unendlich hohen Wänden eingesperrt. Es kann sich dort frei bewegen. Zum Überwinden der Wände ist aber eine unendlich große Arbeit notwendig.

(stark vereinfachtes Modell des Atoms; Elektron ist dort durch das Potenzial der elektrischen Kraft (Coulombpotenzial) festgehalten: $\varphi \sim \frac{1}{r}$ $\Rightarrow$ in Kernnähe praktisch senkrechte „Wände")



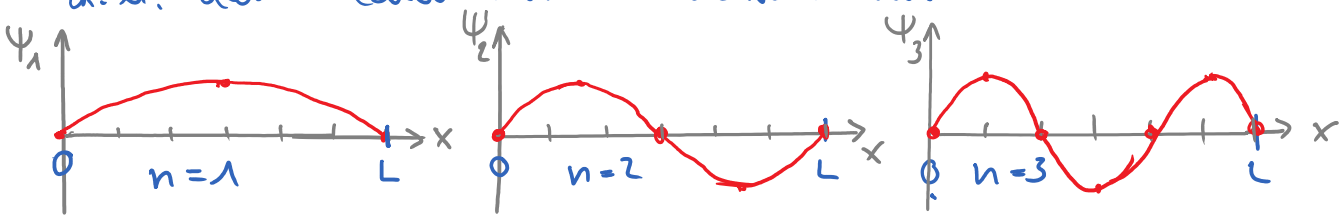
Idee der Quantenphysik: Dem Teilchen wird eine Wahrscheinlichkeitsfunktion Ψ zugeordnet. Das Quadrat von Ψ gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens an einem bestimmten Ort an.

1-dimensional: Ψ ist eine Funktion, die vom Ort (x) und von der Zeit (t) abhängt.
$\Psi(x; t)$

3-dimensional: Ort wird durch x, y, z beschrieben
$\Rightarrow \Psi(x; y; z; t)$

Für $\Psi(x)$ kommen nur stehende Wellen infrage, da sich andernfalls nach kurzer

Zeit durch Überlagerung überall die Aufenthaltswahrscheinlichkeit 0 ergäbe, d.h. das Teilchen wäre verschwunden.



de Broglie-Wellenlänge des Elektrons: $\lambda = \frac{h}{p}$

$$\Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \qquad \Rightarrow \quad p_n = \frac{h}{2L} \cdot n$$

Energie des Elektrons im jeweiligen Zustand:

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 \quad , \quad p_n = m \cdot v_n = \frac{h}{2L} \cdot n$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{h}{2L \cdot m} \cdot n$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{h}{2Lm} \cdot n \right)^2$$

$$E_n = \frac{h^2}{8 L^2 m} \cdot n^2$$

Folgerung: Das Elektron kann im Kasten nur ganz bestimmte <u>diskrete</u> Energiewerte annehmen.

<u>Beispiele</u>

(1) $L = 10^{-10}\,m$, $n = 1$

(eindimensionale „Ausführung" des Wasserstoffatoms im Grundzustand)

$$E_1 = \frac{\left(\cancel{4{,}1357 \cdot 10^{-15}\,eVs}\; 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,Js\right)^2}{8 \cdot (10^{-10}\,m)^2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg} \cdot 1^2$$

$$8 \cdot (10^{-10}\,m)^2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg$$

$$= 6{,}0 \cdot 10^{-18}\,J = 38\,eV$$

$\approx$ 3. Energie ~~des~~ im Wasserstoffatom nach Bohr

② $L = 1\,mm;\ n = 1$

$\Rightarrow E_1 \approx 3{,}8 \cdot 10^{-13}\,eV$

unmessbar klein

③ Elektron mit $E = 1\,eV$, $L = 1\,mm$

$$E_n = \frac{h^2}{8 L^2 m} \cdot n^2$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\frac{E_n \cdot 8 \cdot L^2 \cdot m}{h^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J \cdot 8 \cdot (10^{-3}\,m)^2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg}{(6{,}6 \cdot 10^{-34}\,Js)^2}}$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^6$$