Mathematik 8		
Potenzen		

Lies den folgenden einleitenden Text sorgfältig durch:

Aus der Unterstufe kennst du schon die Potenzschreibweise und wir haben auch schon mehrfach mit Potenzen gerechnet.

Wir wollen den Potenzbegriff im folgenden erweitern und dazu erst einmal die Grundlagen wiederholen.

Eine Potenz wie z.B. x^4 steht als abkürzende Schreibweise für ein Produkt mit lauter gleichen Faktoren: $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$.

*Die Variable x ist in dieser Potenz die **Grundzahl** oder **Basis**, die Zahl 4 ist die **Hochzahl** oder der **Exponent**.*

Mit Potenzen kann man auch ganz einfach rechnen, wenn die Basis gleich ist:

$$x^2 \cdot x^4 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^{2+4} = x^6$$

Beim Multiplizieren zweier Potenzen mit gleicher Basis muss man also nur die beiden Exponenten addieren.

$$x^5 : x^2 = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = \frac{x \cdot x \cdot x}{1} = x^3 = x^{5-2}$$

und $$x^2 : x^5 = \frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$$

Beim Dividieren zweier Potenzen mit gleicher Basis muss man also aufpassen, ob der größere Exponent im Zähler oder im Nenner auftritt.

Übertrage nun den folgenden Eintrag in dein Heft

Potenzen

Definition: Für jede rationale Zahl *x* und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$

Für Potenzen mit gleicher Basis *x* und natürlichen Exponenten $a \geq 2$ und $b \geq 2$ gelten folgende Rechenregeln:

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ $\qquad$ $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, wenn $a > b$ $\qquad$ $\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$, wenn $b > a$

Wir erweitern nun den Potenzbegriff so, dass die bisherigen Regeln weiterhin gültig sind, aber auch Exponenten kleiner als 2 auftreten dürfen.

Die bisherige Definition macht für x^1, x^0 oder x^{-1} keinen Sinn. Es gibt ja schließlich kein Produkt, das nur einen Faktor, gar keinen Faktor oder -1 Faktoren hätte.

Wir lassen uns dabei von der Regel für die Division leiten.

- $\frac{x^5}{x^4} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{x}{1} = x$

  Wenn man die Regel für die Division anwendet, dann erhält man: $\frac{x^5}{x^4} = x^{5-4} = x^1$

  Es ist also sinnvoll, wenn man definiert, dass $x^1 = x$ sein soll.

- $\frac{x^5}{x^5} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{1} = 1$. *Ein Bruch hat bekanntlich den Wert 1, wenn Zähler und Nenner gleich groß sind. Wenn man auch hier die Divisionsregel anwendet, dann erhält man:* $\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0$ *Wenn diese Regel auch in diesem Fall gelten soll, dann muss* $x^0 = 1$ *sein. Dies gilt aber nur, wenn* $x \neq 0$ *ist.*
- $\frac{x^5}{x^6} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x}$. *Bei Anwendung der ersten Divisionsregel würde man aber* $\frac{x^5}{x^6} = x^{5-6} = x^{-1}$ *erhalten. Das ergibt nur dann Sinn, wenn m an definiert, dass* $x^{-1} = \frac{1}{x}$ *ist.*

Übertrage die folgenden Definitionen in dein Heft

Definition:

Für jede rationale Zahl $x \neq 0$ und jede ganze Zahl n definiert man

$$x^1 = x$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Für jede rationale Zahl $x \neq 0$ und zwei ganze Zahlen a und b gilt dann: $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.

Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang die Zehnerpotenzen zum Schreiben sehr großer oder sehr kleiner Zahlen.

Übertrage in dein Heft:

Zehnerpotenzen

10^9	1 000 000 000	1 Milliarde	Giga (G)
10^6	1 000 000	1 Million	Mega (M)
10^3	1 000	1 Tausend	kilo (k)
10^0	1		
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$	0,001	1 Tausendstel	milli (m)
$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\ 000\ 000}$	0,000 001	1 Millionstel	mikro (µ)
$10^{-9} = \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1\ 000\ 000\ 000}$	0,000 000 001	1 Milliardstel	nano (n)