*Nach dem eher mäßigen Erfolg der letzten Weihnachtsfeier (vergleiche 2. Schulaufgabe in 12/1) beschließen die Elfen und Wichtel in diesem Jahr, die Feier frühzeitig zu planen.*

**1.** Die Wichtel sollen die Tische für die Feier aufstellen. Im Abstellraum befinden sich Tische unterschiedlicher Länge. 40 % der Tische sind 80 cm lang, 25 % der Tisch 120 cm lang und der Rest 160 cm lang.

**a)** Wir betrachten als Zufallsgröße X die Länge eines zufällig ausgewählten Tischs. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X. [*4 BE*]

**b)** Die Wichtel stellen nun 200 Tische in zufälliger Reihenfolge zur großen Festtafel aneinander. Die Gesamtlänge der Tafel wird mit Y bezeichnet. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von Y. [*4 BE*]

**2.** Zwischenzeitlich bereiten die Elfen die Teller und Gläser für den Empfang vor. In der Fabrik haben sich leider Produktionsfehler eingeschlichen, so dass nicht alle Teller und Gläser brauchbar sind.

**a)** Bei der Produktion der Gläser treffen auf jeweils 1000 hergestellte Gläser 125 unbrauchbare. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Kiste mit 200 Gläsern mindestens 20 unbrauchbare sind. [*4 BE*]

**b)** Elfin Xanye weiß, dass in einem Karton mit 18 Tellern genau 2 unbrauchbare sind. Sie entnimmt dem Karton 3 Teller [*10 BE*]

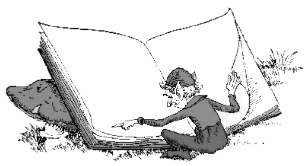
**α)** mit Zurücklegen

**β)** ohne Zurücklegen.

Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen 3 Tellern genau einer unbrauchbar ist.

**3.** Zur Finanzierung der Feier wird eine Weihnachtslotterie veranstaltet. In jeder Ausspielung werden 100 Lose verkauft, von denen genau zwei jeweils einen Gewinn von 100 € erbringen. Die übrigen Lose sind Nieten.
Elfe Erijel kauft bei jeder Ausspielung jeweils zwei Lose (der <u>gleichen</u> Ausspielung). $X_1$ bzw. $X_2$ sei der Gewinn beim ersten bzw. zweiten Los bei dieser Ausspielung. Geben Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für $X_1$ und $X_2$ an.
Welchen durchschnittlichen Gewinn $Z = X_1 + X_2$ kann Erijel erwarten? [*8 BE*]

**4.** Wichtel Stochasti interessiert sich bekanntlich nur wenig für Weihnachtsfeiern und hat wieder einmal nur Mathematik im Kopf. Er betrachtet die Funktion $f: x \mapsto \frac{x \cdot (x-6)^2}{3 \cdot (x-1)^2}$; $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



**a)** Untersuchen Sie f in der Umgebung der Definitionslücke und geben Sie die Nullstellen von f an. [*4 BE*]

**b)** Bestimmen Sie die Asymptoten des Funktionsgraphen $G_f$. In welchem Bereich liegt $G_f$ unterhalb der schrägen Asymptoten? [*5 BE*]

**c)** Stochasti behauptet: $f'(x) = \frac{(x-6)(x^2+3x+6)}{3 \cdot (x-1)^3}$

Bestätigen Sie sein Ergebnis und untersuchen Sie $G_f$ ohne Verwendung der 2. Ableitung auf Extrempunkte (Lage und Art). [*10 BE*]

**d)** Skizzieren Sie $G_f$ sowie die Asymptoten im Bereich $-5 < x < 8$. [*5 BE*]

**5.** Berechnen Sie: $\int_1^2 4x \cdot e^{2x} dx$ (2 Dezimalstellen). [*6 BE*]

**1.a)** $E(X)=0{,}4\cdot 80\,\text{cm}+0{,}25\cdot 120\,\text{cm}+0{,}35\cdot 160\,\text{cm}=118\,\text{cm}$

$Var(X)=E(X^2)-\mu^2=0{,}4\cdot(80\,\text{cm})^2+0{,}25\cdot(120\,\text{cm})^2+0{,}35\cdot(160\,\text{cm})^2-(118\,\text{cm})^2=1196\,\text{cm}^2$

**b)** $E(Y)=E(200\cdot X)=200\cdot E(X)=23600\,\text{cm}=236\,\text{m}$

Falls die Auswahl der einzelnen Tische unabhängig voneinander erfolgt:
$Var(Y)=Var(X_1+X_2+...+X_{200})=Var(X_1)+Var(X_2)+...+Var(X_{200})=200\cdot Var(X)=239200\,\text{cm}^2$

Falls die Auswahl abhängig erfolgt (was aber unwahrscheinlich ist):
$Var(Y)=Var(200\cdot X)=200^2\cdot Var(X)=47840000\,\text{cm}^2$

**2.a)** $P(X\geq 20)=1-P(X\leq 19)=1-0{,}11730=0{,}88270$ (Tabelle!)

**b.α)** mit Zurücklegen: $P(X=1)=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{2}{18}\right)^1\cdot\left(1-\frac{2}{18}\right)^2=3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{64}{81}=\frac{192}{729}\approx 0{,}2634$

**b.β)** ohne Zurücklegen: p ändert sich bei jedem Zug!

$P(X=1)=P(\{100,010,001\})=\frac{2}{18}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{15}{16}+\frac{16}{18}\cdot\frac{2}{17}\cdot\frac{15}{16}+\frac{16}{18}\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{2}{16}=3\cdot\frac{2\cdot 15\cdot 16}{18\cdot 17\cdot 16}=\frac{5}{17}\approx 0{,}2941$

**3.**

| $X_1$ / $X_2$ | 0 | 100 € |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}$ | $\frac{2}{100}\cdot\frac{98}{99}$ |
| 100 € | $\frac{98}{100}\cdot\frac{2}{99}$ | $\frac{2}{100}\cdot\frac{1}{99}$ |

$E(Z)=0\cdot\frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}+100\,€\cdot\frac{2}{100}\cdot\frac{98}{99}\cdot 2+200\,€\cdot\frac{2}{100}\cdot\frac{1}{99}=200\,€\cdot\frac{2}{100}\cdot\left(\frac{98}{99}+\frac{1}{99}\right)=4\,€$

**4.a)** Nullstellen: $x_1=0$ (einfach); $x_2=6$ (doppelt)

Definitionslücke x = 1 ist doppelte Polstelle (kein Vorzeichenwechsel!):

für x>0 ist $f(x)=\frac{x\cdot(x-6)^2}{3\cdot(x-1)^2}>0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=+\infty$

**b)** Zähler: $x\cdot(x-6)^2=x^3-12x^2+36x$

Nenner: $3\cdot(x-1)^2=3x^2-6x+3$

Polynomdivision: $(x^3-12x^2+36x):(3x^2-6x+3)=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}+\frac{15x+10}{3x^2-6x+3}$

$\Rightarrow$ schräge Asymptote $g(x)=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$

$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow \frac{15x+10}{3x^2-6x+3}<0 \Leftrightarrow \frac{15x+10}{3\cdot(x-1)^2}<0 \Leftrightarrow 15x+10<0 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}$

**c)** $f'(x)=\frac{(3x^2-24x+36)\cdot\left(3\cdot(x-1)^2\right)-(x^3-12x^2+36x)\cdot 3\cdot 2\cdot(x-1)}{3^2\cdot(x-1)^4}=$

$$=\frac{(3x^2-24x+36)\cdot 3\cdot(x-1)-(x^3-12x^2+36x)\cdot 6}{3^2\cdot(x-1)^3}=$$

$$=\frac{(3x^2-24x+36)\cdot(x-1)-(x^3-12x^2+36x)\cdot 2}{3\cdot(x-1)^3}=$$

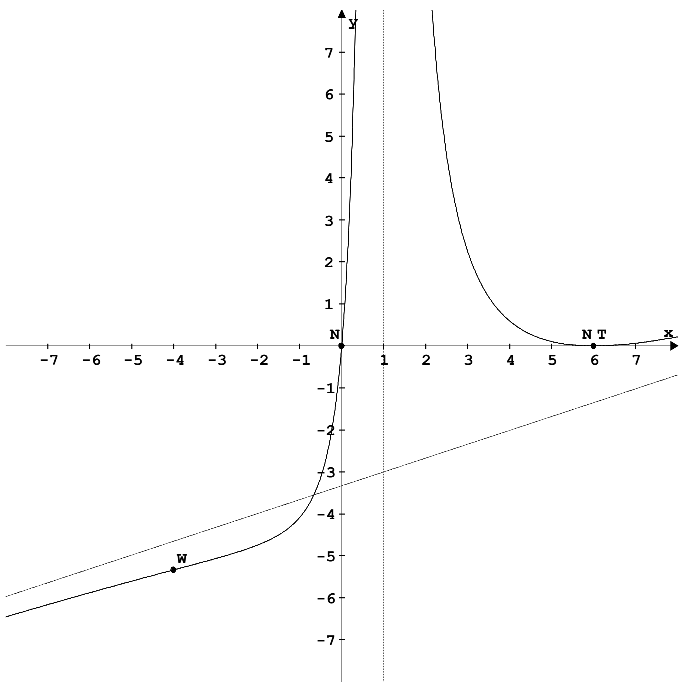
$$=\frac{3x^3-3x^2-24x^2+24x+36x-36-2x^3+24x^2-72x}{3\cdot(x-1)^3}=$$

$$=\frac{x^3-3x^2-12x-36}{3\cdot(x-1)^3}=\frac{(x-6)(x^2+3x+6)}{3\cdot(x-1)^3}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=6$; wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \text{Min}(6|0)$

$x^2+3x+6>0$ für $x\in\mathbb{R}$

**d)**




(Wendepunkt W war nicht verlangt!)

**5.** $\int\limits_1^2 4x\cdot e^{2x}\,dx$:

$u(x)=4x \Rightarrow u'(x)=4$

$v'(x)=e^{2x} \Rightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\Rightarrow \int\limits_1^2 4x\cdot e^{2x}\,dx=\left[4x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2-\int\limits_1^2 4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\left[2x\,e^{2x}\right]_1^2-\left[2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2=$$

$$=\left[(2x-1)\cdot e^{2x}\right]_1^2=3e^4-e^2\approx 156{,}41$$